DOI: 10.3969/j.issn.1672-8874.2010.01.024

从 Riemann 函数连续性的证明浅谈数学分析课程中的启发式教学*

王红霞, 成礼智, 陈波, 何艳丽
(国防科学技术大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

[摘 要] 本文针对数学分析课程的特点, 以 Riemann 函数的连续性证明为例, 探讨了启发式教学在数学分析课程教学中的应用。简要论述了如何结合现代教学手段启发学生发现证明思路、引导学生严格描述证明过程、以及对命题结论作若干拓展思考等问题。

[关键词] 数学分析; 启发式教学; Riemann 函数
[中图分类号] G642.0 [文献标识码] A [文章编号] 1678-8874 (2010) 02-0074-02

Thinking on Heuristic Teaching of Mathematical Analysisfrom the Continuity of Riemann Function

WANG Hong-xia, CHEN Li-zhi, CHEN Bo, HE Yan-li
(*College of Science*, *National University of Defense and Technology*, *Changsha* 410073, *China*)

Abatract: This paper deals with the heuristic teaching model in the teaching of mathematical analysis, in the light of the characteristics of the course. As a typical example, the continuity of Riemann function is taken to show the practical way in our teaching process. Some practical methods are presented including how to straighten the thinking, and give a rigorous proof, and furthermore to consider some expanding propositions of the theorem.

Key words: mathematical analysis; heuristic teaching; riemann function

一、引言

数学教学一直是高等教育中的重要内容, 对于理工科专业学生而言, 数学基础课教学质量对学生综合素质和创新能力的培养有着重要影响。数学分析是大学数学专业和部分实施“数理打通”的非数学专业的一门重要基础课, 与高等数学相比, 数学分析更侧重培养学生的抽象思维能力和逻辑推理能力。

在给出严格数学定义的前提下, 课堂讲述一系列重要定理和典型命题的证明是培养这种能力的重要手段。在实际教学中, 正是这些众多的证明让学生“望而生畏”, 有些学生不能理解: 为什么有些看似显然的命题需要大费周章的证明? 更多的学生不能理解证明的内在思想, 自己遇到问题要么无从下手, 要么照猫画虎, 不得要领。对于刚进入大学的一年级新生而言, 抽象层次的骤然提高、研究对象和思维方式的巨大转变, 成为他们学习数学分析过程中面临的巨大挑战[1]。

我们认为应该从两个方面着手解决这个问题。其一, 教师要改革教学观念和教学方式, 在准确传授概念、知识的同时, 着力于勾勒逻辑思考的过程, 启发学生探索新知; 其二, 强调学生发挥主观能动性, 多思考多练习, 不但把数学分析学懂而且学通。根据教育心理学的观点, 兴趣是学习最重要、最直接的内部动力, 只要我们在教学过程中, 注重教学内容表述的启发性, 使学生感受到思考问题、解决问题的乐趣, 激发并保持学生的学习兴趣, 就能达到较好的教学效果[2]。本文以重要定理的教学为例, 讨论在实践中如何实施启发式教学。

二、Riemann 函数连续性的教学

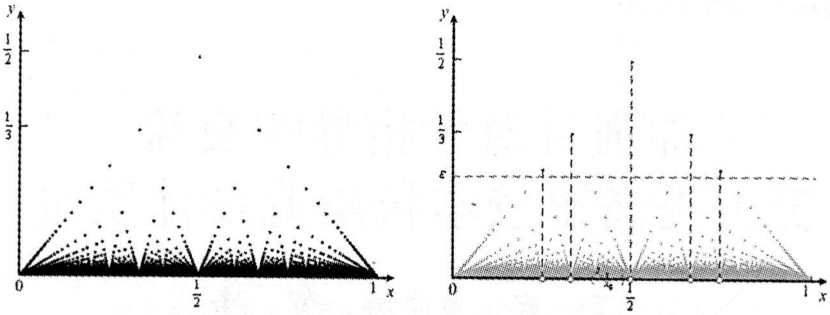
几乎所有的数学分析教程中都有关于 Riemann 函数的描述, 该函数由德国数学家黎曼发现并提出, 在高等数学中被广泛应用, 深入理解这个函数可以帮助澄清很多有关函数性质的命题。根据一点连续 ε-δ 定义证明 Riemann 函数在所有无理点处连续, 是函数连续性部分的经典例题[3,4]。但是, Riemann 函数在形式上已经让刚进入大学的学生颇费思量, 其连续性的结论则显得更加抽象。为了克服这个困难, 在教学过程中, 我们借助数学计算软件 Mathematica 作出了 [0, 1] 区间上 Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}0, x=0,1\ \text{或无理数}\\ \dfrac{1}{q}, x=\dfrac{p}{q}\ \text{为有理数}, p, q\ \text{互素}\end{cases}$$

的图像 (如图1(a)所示)。图中直观、清晰的显示出有理点的可数性, 这个性质不仅是证明R(x) 在无理点连续的起始步骤, 更是理解实数系完备性的生动实例, 也是泛函分析、拓扑学等后续课程的基础。

---

* [收稿日期] 2009-07-07
[作者简介] 王红霞 (1977-), 女, 江苏扬中人, 国防科学技术大学理学院副教授, 博士。



(a) [0，1] 上黎曼函数的图像　　(b) 黎曼函数连续性证明过程示意

图 1　黎曼函数

从图 1(a) 得到对函数 R(x) 的直观印象后，要证明 R(x) 在任一无理点 x_0 处连续，就显得非常自然。对于任一给定的 ε，只要把图 1(b) 中位于 y= ε 上方有限多个点排除在外，余下所有点都满足

$$|R(x)-0|<\varepsilon$$

下面的问题就是找到点 x_0 的一个 δ 邻域，该邻域不包含上述有限个点(位于 y= ε 上方) 在 x 轴上的投影点。要做到这一点，只需取 $\delta=\min\{|x_0-r_i|\ i=1,2,\cdots,n\}$ 即可。

三、在定理教学中得到的几点经验

在上述教学过程中我们发现，通过图像的直观启发，学生更容易接受和理解定理的证明；而严谨的证明过程又训练了学生的逻辑推理能力以及用数学语言表达抽象思维的能力。这主要源于我们在以下两方面的努力。

1．化抽象为形象

很多教材中对 Riemann 函数有如下描述：“无法画出函数图像”，并以此佐证“并非所有函数都可绘制函数图像”的论断。事实上，不能准确绘制图像，并不意味着不能用图像来示意其几何特性。这里通过形象化图示，帮助学生架起联系直观和抽象的桥梁。借助图示，并辅以必要的启发引导，每一步推理都显得简明而自然。比起单纯的符号推理，这种讲解方法学生更容易理解，也更不易忘记。

尽管数学经常被比喻成“思维的体操”，“逻辑和符号的游戏”，但是直觉往往才是出发点。将直觉和抽象联系起来，最自然、直接的方法就是借助图示使抽象概念形象化。在数学分析教学中，我们一直鼓励学生通过直观想象、理解概念，并大胆地依靠直觉去寻求严格推理之路。这在中值定理的一系列命题和典型例题中也有充分体现。

2．分析引导先于严格证明

从函数连续性的概念出发讲解上述例子的证明时，首先列出用 ε-δ 语言描述的函数一点连续的概念。一点连续性的几何含义是，要求函数值 f(x) 与 $f(x_0)$ 的距离不超过任意给定的 ε，只要 x 与 x_0 的距离不超过 δ_ε 即可。因此证明的关键在于寻找 δ_ε，而图 1(a) 则直观的显示了如何求得 δ_ε。

这个分析过程正是学生在高中阶段非常熟悉的“条件、命题两边夹”的方法，事实上也是大多数证明过程中最常用的思路。通过分析引导，将证明的思维过程清晰的展现在学生面前，使他们了解到如何由已知证明未知，在此基础上，再按照严格的语言描述证明过程。这样，学生不仅理解了 Riemann 函数的连续性，同时也了解到如何证明一般函数的一点连续性，进一步的也是更重要的，学生通过这个例子的学习了解到如何分析问题，如何通过自身努力解决问题。

在当前课程信息量日益增大、课时却日益缩减的大趋势下，学生的课后练习和思考体会固然重要，但是要在尽可能短的时间内使学生各方面能力得到尽快提升，就需要教师在课堂上“授之以渔”，特别重视对学生分析、解决问题能力的引导。像数学分析这种面向大一新生的相对艰深的课程，证明之前的分析启发显得尤为重要。

四、对定理的引申教学

Riemann 函数是数学分析中非常有趣同时又非常有用的一个例子，尽管这个函数看上去“模样古怪、不合常规”，但是却能说明很多问题。在判断关于函数连续性、可积性等许多不甚显然的结论时，Riemann 函数常常被用作反例。在一点连续性部分讲解的这个例子可以进一步引申到其他相关内容，如帮助学生初步建立集合论和极限理论中的许多基本概念。此外，由于 Riemann 函数形式简单有趣，在此作适当引申，可以避免枯燥的教化方法，使学生体会到数学逻辑的严谨之美、理解数学中渗透的科学观。

1．经验主义与严格推理

“Riemann 函数在所有无理点处连续，在有理点不连续”，这个结论与我们的直观想像有些距离。根据一般经验，学生通常将函数连续想像成“函数图像不间断”，但是 Riemann 函数看上去并没有这个性质，即便在无理点附近，函数值仍旧是“跳跃”变化的，只是跳跃的幅度可以非常小而已。学生在这里首先遇到的就是经验主义和严格推理之间的矛盾，这在无限集的势等后续知识学习中会不断遇到。数学以及整个科学都是建立在严密的公理体系和理论推导之上的，相信逻辑而非经验，这是科学的基本精神，也是在学生通过大学数学教育所必须具备的科学素质之一。

2．从有限到无限

Riemann 函数的连续性之所以难以想象，另外一个重要原因就是学生对极限的理解还需要进一步深化。一点连续性本质上描述的是当 x 趋于 x_0 时，函数值变化的极限性质，这与有限的情况有本质区别，也不同于后面所讲的区间上连续。这个例子恰好可以在帮助学生准确理解一点连续概念的同时，进一步体会函数极限的内涵。

3．有理数与无理数

从 Riemann 函数这个非凡的例子可以引导学生思考：是否可以类似地构造一个函数，

(下转第 78 页)

设计过程中应尽量避免出现如下问题:

(1) 导师大包大揽, 代替学生完成课题。有时由于选题难度过大、学生毕业设计时间不充分等原因, 导师将课题承担过来, 完全取代学生的角色。这表面上提高了本科毕业设计的质量, 但违背了本科毕业设计的初衷, 对学生的培养和教学质量的提高都是极为不利的!

(2) 导师不闻不问, 放任自流。或者由于导师教学、科研任务重, 或者由于导师指导的学生过多, 有时导师在学生毕业设计过程中不过问进展情况, 完全放任自流。这种做法会降低教师在本科毕业设计过程中的主导性作用, 失去对学生毕业设计完成情况的控制, 在实践中同样是十分有害的。

(3) 指导无目的、无计划, 朝令夕改。不加认真思考的指导往往容易出现错误, 从而误导学生。这种随意性指导可以通过采取不同的交流方式增加教师思考时间来避免。

四、结论

军校尤其是技术类军校的本科生, 往往具有较强的主动性和求知欲, 但由于定期的军事政治素质训练, 分散了本科毕业设计时间, 教师应当在学员本科毕业设计过程中加强有针对性的交流与指导。

近年来, 作者指导了多名电子技术类的军校本科生的毕业设计工作, 并在整个毕业设计期间利用多样的方式加强了对学员的指导与交流。实践表明, 加强师生间的交流可以有效提高本科毕业设计的质量, 从而提升了本科教学的效果。

[参考文献]

[1] 教育部高等教育司办公厅. 关于加强普通高等学校毕业设计(论文) 工作的通知[R]. 北京: 教育部高等教育司, 2004.

[2] 徐建邦. 对本科毕业论文工作的几点思考[J]. 东北财经大学学报, 2007, (4): 83-86.

[3] 唐永光. 理工类专业本科毕业论文写作现状调查与分析[J]. 职业时空, 2007, 3(8): 28.

[4] 李普亮. 高等院校本科毕业论文选题的探讨[J]. 吉林广播电视大学学报, 2007, (2): 62-65.

[5] 张俊举, 钱芸生, 富容国等. 依托科研课题, 提高本科毕业设计质量[J]. 电气电子教学学报, 2008, 30(4): 116-117.

[6] 黄万群, 蒋淑英, 李立英. 以教学评估为契机 提高工科院校本科毕业设计质量[J]. 科教文汇, 2009, (7): 73-74.

(责任编辑: 范玉芳)

(上接第 75 页)

使之在所有有理点连续、在所有无理点不连续? 这个问题的回答涉及到有理数和无理数的本质区别, 而这恰恰是分析学最基础的知识。

由于历史和现实的原因, 现行数学分析教程大多倾向于, 在第一学期不过多涉及集合论的内容, 而把这部分内容放到后续实分析课程中集中讲解。但是在适当的时机引导学生去思考却是十分有益的: 一方面可以启发学生通过严密的数学理论来揭示问题的本质; 另一方面, 对于部分资质好、学有余力的学生, 这种点到即止的引导可以帮助他们拓展视野。

事实上, 在教学过程中, 我们通过对这个例子的上述引申, 确实使学生体会到一系列数学概念和数学思想的内在联系, 有效地激发了学生探索未知的欲望和激情。

五、结论

在我国最早的教学理论著作《学记》中对所谓“君子之教”有以下论述: “道而弗牵; 强而弗抑; 开而弗达。道而弗牵则和; 强而弗抑则易; 开而弗达则思。和易以思, 可谓善喻矣”。这段话对于教师在教学中的启发、引导作用阐述得非常深刻。“授之以鱼, 不如授之以渔”, 教学并不只是向学生传授真理, 更要教会学生如何积极、主动地去思考问题、发现真理。我们的教学过程正是围绕这个目标展开的。多年的教学实践证明, 这种做法确实可以充分调动学生学习的积极性, 有助于他们在轻松愉快的过程中学会数学严密的逻辑体系和抽象的思维方法。

[参考文献]

[1] 项明寅, 方继光等. 论“数学分析”入门学习四大难关的成因与对策[J]. 高等理科教育, 2006, (6).

[2] 杜海清. 关于数学分析课程教学的几点思考[J]. 高等数学研究, 2007, (10).

[3] 华东师范大学数学系. 数学分析(上、下册) (第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[4] 吴孟达, 李志祥, 宋松和. 数学分析(上、下册)[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2002.

(责任编辑: 阳仁宇)