

DOI: 10.3969/j.issn.1672-8874.2013.02.009

# 《微分方程》课程研究型教学的探索与实践

王·晓, 刘雄伟

(国防科学技术大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

[摘要] 研究型教学是提高学生自主学习能力, 激发学生创新能力、培养批判性思维有效的教学模式。通过对微分方程课程研究型教学理念、模式的思考与分析, 提出了微分方程研究型教学的设计思路 and 实施方案。

[关键词] 研究型教学; 微分方程; 教学模式

[中图分类号] G642.0 [文献标识码] A [文章编号] 1672-8874(2013)02-0027-04

## An Exploration and Application on Research - Oriented Teaching of Differential Equation Course

WANG Xiao, LIU Xiong - wei

(College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Research - oriented teaching is an effective teaching mode to improve the self - learning ability, inspire the ability of innovation and develop the critical thinking of the students. In this paper, we investigate the research - oriented teaching of differential equations and give a frame of the research - oriented teaching of differential equations.

**Key words:** research - oriented teaching; differential equation; teaching pattern;

### 一、问题提出

传统的数学课堂教学过程一般为: 由例子引出定义, 再用例子诠释定义, 接着是相关引理、定理, 最后是应用案例。这种教学模式的优势在于能够清晰且简要地表述理论的核心、理论发展的内在逻辑和数学的美感, 使学生能在较短时间内获得系统的数学知识。但这样的教学模式不是以培养学生能力为中心, 缺乏学生的参与, 忽视学生探究知识的过程, 致使缺乏自主的、创造性的思维, 更缺少鼓励学生挑战学术权威和激发学生批判性思维的氛围。

大学数学研究型教学, 是以数学相关课程为平台, 在教师指导下, 学生以个人或团队为主体, 自主、能动地学习、探索、思考; 着重培养学生发现问题、解决问题的能力, 发挥团队合作精神, 培养学生创新意识、批判性思维; 是教学与科研的有机融合, 学生寓学于研, 教师寓教于研的教学模式, 能很好地解决传统教学模式存在的问题。

《微分方程》课程是理论和实践紧密结合的大学数学课程之一, 学生在学习该课程的过程中, 除了理论知识的学习之外, 更重要的是需要有理论应用于实践的探索

过程。因此, 根据研究型教学的特点, 我们选用《微分方程》课程作为实施研究型教学改革的试点课程。经过近三年的研究与实践, 取得了很好的教学效果, 并产生了积极的影响。

### 二、《微分方程》研究型课程教学理念

俄国心理学家、教育家维果茨基(1896-1934)的“最近发展区域”学习理论指出: 学生只有在自己原有的知识、能力的最近边缘去发现, 才能到达最佳学习效果。老师在学生的学习过程中起到的是脚手架的作用, 引导着学生自主、能动地去学习。研究型教学模式正是对此教育理念的深化和实施。

因此, 我们界定《微分方程》课程研究型教学的教学理念是: 创设类似于科学研究的教学环境和氛围, 贯彻“边学习、边研究、边实践”的教学策略, 加强实践教学环节, 将问题探索、课题研究等实践环节融入课堂教学、拓展学习和考核中。使学生从中获得理解及自主学习数学理论的能力、获得选择数学方法描述并解决实际问题的能力, 并最终享受到创造和解决实际问题的乐趣。

[收稿日期] 2013-02-25

[基金项目] 湖南省普通高等教育教学改革研究项目

[作者简介] 王晓(1979-), 男, 河南唐河人, 国防科学技术大学理学院副教授, 博士, 研究方向: 微分方程理论及其应用。

### 三、《微分方程》研究型教学设计思路

在“最近发展区域”的教育理念指导下,《微分方程》课程教学思路设计为:以理论联系实际,发现、解决自然科学、社会科学等应用学科领域中存在的微分方程问题,初步培养学生探究型学习方法,发挥学生团队精神,培养学生创新意识、批判性思维和主动发现、解决问题的能力,以提高科学素养为教学目标,期望达到传授知识、培养能力,最终将能力内化为素质的目的。为此,将《微分方程》教学整体设计分为三部分:课堂教学、课外探索和学习效果评价。

#### (一) 课堂教学

##### 1. 注重获取知识的理念,着重培养能力

课堂教学方法灵活多样、优化课后习题、鼓励创新。在整个课堂教学过程中老师起脚手架的作用,积极引导参与教学过程,设置研究型课题。实施启发式、探究式、讨论式、参与式、项目式等多种教学方式相结合的教学模式,鼓励学生积极主动地参与科研活动。在传授知识的同时,更加注重获取知识的理念,把“为什么要获取这个知识?怎样获取这个知识?这个知识是怎么来的?”贯穿于整个课堂。不但传授知识,而且分析知识产生的过程,把教学过程当作研究、探索、感受的过程。使学员不仅掌握作为研究结果的知识,而且懂得知识产生的过程,从而掌握科学的方法论,能够研究创造出新的知识。<sup>[1]</sup>

下面演示课堂讲授“常数变易法”的教学设计。对常微分方程而言,一阶线性微分方程是其中最重要的一类方程,其核心是

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad (1)$$

的求解问题。

方程(1)对应的齐次方程 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 的通解,利用分离变量法可得 $y = Ce^{-\int p(x)dx}$ ,其中 $C$ 为任意常数。

“常数变易法”的思想:将常数 $C$ 用函数 $C(x)$ 代替,假设为 $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ 方程(1)的解,如能求出函数 $C(x)$ ,则方程(1)便可求解。引导学生独自尝试,发现可求出函数

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C, \text{因此可得方程(1)的通解为}$$

$$y = C(x) = e^{\int p(x)dx} \left[ \int q(x)e^{-\int p(x)dx} dx + C \right] \quad (2)$$

这种求解方法被称作“常数变易法”,公式(2)被称作“常数变易公式”。

上述求解过程和“常数变易公式”的获得简洁而巧妙,学生经过自己动手获得后都叹为观止。同时也心存疑惑:谁、又是如何创造出这么美妙又实用的方法?

带着疑问,引领学生一起揭开“常数变易法”来历的

神秘面纱。经探究,常数变易法是法国大数学家拉格朗日花了11年时间研究所成。<sup>[2-4]</sup>拉格朗日的“常数变易法”完全解决了常系数线性方程的求解问题,被誉为18世纪常微分方程求解的最高成就。

采取“穿越”的讲授方式,带领学生“穿越”到18世纪的法国,共同探索拉格朗日获得“常数变易法”的心路历程,激发学生学习数学的热情和探究未知的好奇感,培养学生爱思考、勤思考的能力。为此,将此讲的题目命名为“穿越——如果你是拉格朗日”。

在“常数变易法”之前,数学家普遍采用的求解微分方程的方法是“分离变量法”和“齐次方程求解法”。引导学生用这两种方法进行尝试。

首先尝试分离变量法。可分离变量的方程类型为

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (3)$$

而方程(1)不能写成分离变量的形式。学生陷入思考,不能利用分离变量法解决该问题。此时告诉学生,这就是科研的过程,因为科研并非都能收获硕果,有时可能一无所获。在此过程中,学生充分体会到科研探索过程中所经历的苦和失败后的懊恼。

通过引导学生理解方程的解实际上为关于自变量 $x$ 的函数 $y(x)$ ,假如已知方程(1)的解为 $y(x)$ ,通过逆向思维,引导学生思考,发现方程(1)可变形成下述形式

$$\frac{dy}{dx} = y \left[ \frac{qx}{qx} \right] - p(x) = yQ(x), \quad (4)$$

其中 $Q(x) = \frac{qx}{qx} - p(x)$ 此时可分离变量求出(4)的通解 $y = Ce^{\int Q(x)dx} = Ce^{\int \frac{qx}{qx} - p(x)dx}$ 。然而该公式中两边都含有未知函数 $y(x)$ ,但观察到 $Ce^{\int \frac{qx}{qx} - p(x)dx}$ 是 $x$ 的函数,再与 $C(x)e^{-\int p(x)dx}$ 相比,学生理解为什么将 $y = Ce^{-\int p(x)dx}$ 中常数 $C$ 的用函数 $C(x)$ 代替求解。

引导学生使用“齐次方程”求解的方法进行尝试,发现使用“齐次方程”求解法也可以解释常数变易法的来历<sup>[3,4]</sup>。

此时,问题看似已解决,但拉格朗日发现“常数变易法”时是否如我所想,引导学生独立思考,是否仍有其他的解释。“穿越”回现代,用现有的常微分方程知识再次尝试解释常数变易法,以及常数变易法的应用等等,进一步引导学生思考这种方法。通过这样的经历,学生独立思考和尝试,使得学生对“常数变易法”有不同的理解和新的认识。

在教学过程中,充分调动学生的情绪,激发学生的求知欲,提高学生的创新能力。由于参与求解和讲解的过程,学生普遍有成就感。这种获取知识的过程,比单纯的记忆,更加深刻,更能激发学生学习数学的热情。学生体验到前辈们在创造数学理论时所遇到的困难、解决困难时的思维方法。

## 2. 优化课后习题、鼓励创新

把传统为巩固知识而布置的课后习题进行了科学的规划, 设置为三类问题: 知识巩固型的必做题、团队合作型思考题、探索创新型公开问题。在讲课的过程中增加科学研究的小课题, 并为学生推荐可读的研究论文, 同时把这些问题的解决贯穿到平时成绩中。挑选三个比较有意思、具有可研讨的课题作为研讨课的内容, 提供给学员, 鼓励学员上讲台讲述自己的想法。对于具有创新性的想法, 帮助学生整理投稿发表。最终达到巩固学习知识, 培养学生查阅、翻译外文资料的能力和动手能力、合作能力、表达能力、创新能力。

## 3. 研讨

对于适当的内容, 可以为同学们播放 MIT 有关微分方程的视频公开课, 请学生对比分析, 体会国外精品视频课的氛围。同时精选适当内容, 实施三次“讨论班”式的研讨课。在研讨中, 鼓励学生大胆提问, 勇敢质疑,

倡导师生共同“在学习中研究, 在研究中学习”, 培养学生的实践能力和批判性思维。例如, 在研讨“二阶常系数齐次线性方程求解新讲”时, 有学生竟然给出了一种新的解法。由此可见, 只要给学生创造出适合创新的气氛, 学生的创造力是无穷的。

## (二) 多种评价方式全面考察学习效果

教学效果评价, 包括对教的评价和学的评价, 这里主要设计对学的评价。如何构建科学的、激发本科生创新能力的考核方式, 是高校教育工作者们一直探索的课题。课堂教学的开展及学生课外的探索都围绕其展开。大学教育应从应试教育中解脱出来, 不能“一考定输赢”。因此, 考核方式改革应为教学改革的重要内容, 为此探索形成“平时成绩、科技知识阅读、期末考试、课程大作业”的综合评价模式, 让学员在探究性学习、批判性思考中增强创新能力。

表 1 《微分方程》课程研究型教学考核方式及学生能力培养

考核内容	能力培养	考核方法
1. 平时成绩 (20%)	学习态度	i 作业、课堂随机测验
	想象力、创新力	ii 公开性问题
	独立思考、勇于提问发表自己的见解和敢于质疑	iii 问题提问
2. 科技知识阅读 (10%)	阅读能力、表达能力	读书心得
3. 期末卷面考试 (30%)	认知能力、记忆力、理解力、逻辑思维	闭卷考试
4. 大作业 (40%)	创新能力、团队合作、交流能力	i 教师指定课题或自选课题
	批判性思维、主动发现问题、解决问题	ii 收集资料、分组讨论、研究、形成报告
	语言表达能力、组织能力、临场应变能力	ii 报告答辩

### 1. 平时成绩

平时成绩主要包含作业、课堂中随机测试与课堂中布置的开放性问题。开放性问题比较难, 一般没有标准答案, 发挥学生的想象能力, 通常情况下做出来就是一篇小论文。

问题提问部分: 在上课时准备一叠白色的小纸条, 有人问问题或者回答问题可发小纸条一张, 请提问者或者回答者写上自己的姓名和学号。同时, 在课堂教学过程中, 鼓励学生即时提问。该部分主要是想培养学生独立思考的能力、勇于提问发表自己的见解和敢于质疑的能力。

### 2. 科技知识阅读

几年的实践发现, 学生阐述自己思想、观点时不自信与表达能力低下。究其原因, 应该是中国学生普遍阅读面窄, 造成没有足够素材作为支撑, 从而限制了思考和理解问题的广度。因此, 在微分方程课程研究型教学改革中, 为增加学生阅读量, 加强阅读能力, 增加学生相关阅读能力的考核。阅读的内容不限于数学, 以提交读书报告或读书心得作为测试结果。

### 3. 期末考试

主要测试学生对书本知识和课堂讲授知识的理解程度和掌握程度。

#### 4. 课程大作业

大作业由教师在课程进行到一半的时候,指定几个课题或者由学生自选,采取分组讨论、研究,最后写成研究报告,并参加答辩的形式实施。大作业的考核方式,没有标准答案,但所做的工作需有理有据,模型是经过推导的,结论是经过科学论证分析的。教师在课堂中传授的知识不局限于教材,还有很多科技论文及其它相关书籍中的相关内容(例如给学生介绍 Science 和 Nature 等上面的相关文章,引导学生结合所学知识进行阅读分析等)。

课程大作业的考核方式,既能考查学生对学习内容的掌握和理解程度、应用所学知识提出问题、分析问题和解决问题的能力,也可激发学生从事科研的兴趣和创新精神,培养学生独立自主的学习能力、文献检索能力以及探索问题的科学精神和严谨的科学态度,增强学生研究解决实际问题的能力、创新的意识、批判性思维的能力,极大地锻炼学生的团队合作意识、交流能力和组织能力,同时也能弥补传统考核方式的不足。

#### (三) 课外探索设计

课外阅读要求阅读广泛、探讨深入、自主自立。一周4学时,一学期38学时的课堂教学时间是有限的,在教学实践中,充分地调动学生学习的积极性,重视课外的学习和探索。由于课时的限制,一些创新型的题目不得不留给学生课外进行探索,课外探索主要通过课程大作业和探索创新型开放性问题两个方面来体现。随堂测验、发现问题、提出问题、提出创意及学期末的课程大作业都需要学生在课外进行充分的准备和学习,只有经过课堂外自己或是和同学一起的学习、探讨,他们的自学能力、实践能力、团队协作等能力才能得到充分的发展和提高。

#### 四、结束语

通过近三年的教学改革研究与实践,本着提升学生的创新能力、研究能力和“用数学”的能力的教学目标,教学效果取得了明显的提升,我们指导了两届本科学员开展了课程项目研究,学员们撰写的研究论文汇编成论文集《常微分方程模型》与《ODE 撬动地球—从自然走向理性之论》,其中《男生追女生的数学模型》发表在国内数学类核心期刊《数学的实践与认识》上,被评为2013年“菠萝奖”,认为“用人类最理性的数学公

式作为人类最感性的恋爱行为建立了初步的动力学模型”。目前有关这篇文章的讨论在网络上备受热议,支持者居多,更有评论者认为这篇文章激起了他们学习微积分的热心,打破了他们心中认为数学是除了公式定理没什么使用价值的一贯看法。

《微分方程》研究型教学的实施也得到了学生的充分认可。例如系统工程专业09级学员周星在接受电视台采访时讲:做这个作业,我们花费了近两个月的课余时间,在此过程中确实激发了我们的创新能力。这是我大学四年中学到知识最多的一门课,启发我在以后的生活中,可以多用科学的视角结构生活,世界可以变得更清晰。学员克居正认为:论文的操作,让我更加熟悉了“常微分方程”这门课程,还学到了很多课本外的知识,比如如何使用微积分软件工具等等,“数学”不再是冷冰冰的公式。还有旁听这门课程的同学通过网络对研究型教学进行评论:“……大作业才能考察出分析、解决问题的能力,还有合作、沟通、信息检索,这都是现在科研人才不可缺少的。而有了这样一个研究式学习的环境,知识才能被真正被消化和吸收。”

虽然这样的教学方式颇受同学们的青睐,教学效果也比较明显,但在实践中,还有存在一些问题。比如,在进行研讨课时,虽然提前告知研讨的内容,但有些学员的参与度不高。这可能与中国的中小学教育有关,学生从小学开始,对课堂教学的参与度比较低,参与意识淡薄有关。因此,在以后的教学过程中,我们将考虑加入研讨成绩,激励学生参与实践讨论,力争能够调动所有学员的参与热情,真正全面、有效地提高课程教学质量。

#### [参考文献]

- [1] 殷建平,关于研究型教学的思考与实践,国防科技大学新教员培训讲座,2012.
- [2] 任瑞芳. 常微分方程理论的形成[D]. 西北大学博士论文,2008.
- [3] 杨芳. 关于常数变易法的教学探讨[J]. 高师理科学刊,2010,30(2):92-95.
- [4] 杜玲玲. 常数变易法的教学策略[J]. 教育与教学研究,2010,24(2):101-103.

(责任编辑:陈勇)