

DOI: 10.3969/j.issn.1672-8874.2013.04.029

# 数学史料的教学价值及案例分析

刘雄伟, 张新建, 王 晓

(国防科学技术大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

**[摘要]** 微积分思想是微积分知识的精髓, 是知识转化为能力的桥梁。只有充分认识和领悟微积分思想、方法的来源, 学生才能真正地理解、领会与应用微积分知识来分析、解决实际问题。在《高等数学》课程教学过程中, 实施融入数学史素材, 挖掘微积分思想源头, 充实教学内容、更新教学设计、丰富课堂教学方式和课后练习, 以求达到降低数学内容抽象性和学生学习数学的恐惧感, 提升学生学习数学的兴趣与应用数学的意识和发现、分析、解决问题的能力。

**[关键词]** 微积分; 高等数学; 数学史; 数学思想

**[中图分类号]** G642.4 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1672-8874(2013)04-0093-03

## Teaching Value and Case Analysis of Mathematics Historical Sources

LIU Xiong-wei, ZHANG Xin-jian, Wang Xiao

(College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Calculus ideas are the essence of calculus. They can help us to transform our knowledge into ability. Students can really understand, apply calculus to analyze and solve practical problems only if they fully recognize the origins of the ideas and methods of calculus. In the process of higher mathematics teaching, in order to reduce the abstractness of mathematics and students' fear in learning mathematics, improve students' interest and consciousness of applying mathematics and the ability to discover, analyze and solve problems, we carry out some reforms and explorations on integrating historical materials of mathematics with teaching content, excavating thought origins of calculus, enriching teaching content, updating instructional design, employing various teaching methods and exercises, etc.

**Key words:** calculus; Higher Mathematics; mathematics history; mathematical idea

### 一、引言

微积分是一系列数学思想演变的结果, 也是《高等数学》课程的内容主体。因此, 微积分思想是《高等数学》课程教学内容的精髓, 更是将高等数学知识转化为能力的桥梁。《高等数学》课程作为所有理工科学生必修的数学公共基础课程, 对人才培养质量的提高起着其他课程无法替代的作用。学生只有充分认识和领悟微积分思想、方法的来源, 才能真正地理解、领会与应用微积分知识来分析、解决实际问题。

为了实现创新、研究实践型人才培养的需求, 我们从以下几个方面对《高等数学》的教学过程进行了改革与探索。首先, 更新教学内容, 从内容上挖掘思想的来源, 让学生意识到数学的理论与方法来源于实践, 降低数学内容的抽象性与学生学习数学的恐惧感, 增强应用数学的意识; 其次, 在课堂中, 重现理论、方法产生的过程与情景, 让学生以研究者的角色参与理论与方法的产生过程, 培养学

生的创造意识和提升学生发现、分析和解决问题的能力; 第三, 在课后布置理论、方法应用实践性和知识拓展性问题, 让学生在解决问题的过程中享受问题解决带来的成功喜悦, 并及时了解各学科之间的联系, 架构起知识广泛应用的桥梁。本文讨论了《高等数学》教学中数学史内容的选择及价值, 并通过极限、常数变易法、中国古代数学中内插法的产生与影响和几个常数的产生与发展历程等实例, 展示教学内容、教学设计和课后实践的做法及其对学生学习《高等数学》产生的积极影响。

### 二、数学史料的教学价值及其选择

法国数学家亨利·庞加莱曾说: “如果我们想要预测数学的未来, 那么适当的途径是研究这门学科的历史和现状”<sup>[1]</sup>。数学史与数学教育的关系 (HPM) 作为一个研究领域始于1972年, 并在第二届国际数学教育大会上成立了数学史与数学教学关系国际研究小组。HPM 研究内容包括: 数学与其他学科的关系、多元文化的数学、数学史与

**[收稿日期]** 2013-08-05

**[基金项目]** 湖南省普通高等教育教学改革研究立项项目 (项目批准号: [2012] 401号);  
国防科技大学“十二五”本科教育教学研究立项课题 (项目编号: U2012105)

**[作者简介]** 刘雄伟 (1974-), 男, 湖南安化人, 国防科学技术大学理学院讲师, 在读博士, 主要从事高等数学教学与快速算法研究

学生的认知发展、数学史与发生教学法、数学史与学生的困难、数学原始文本在教学中的应用等<sup>[2]</sup>。

数学史料在数学教育中的作用很多<sup>[3,4]</sup>，英国数学史家福弗尔曾总结出应用数学史于数学教学的十五种理由<sup>[5]</sup>。对学生而言，可以加强理解和掌握数学的概念、理论和方法的本质，加强对数学发展的影响、作用和地位的认识，同时对学生驾驭教材能力的培养和开发学生数学思维，激发学习兴趣，提高数学素质，启发人格成长等都有着积极作用；对教师而言，可以帮助教师预见学生的数学认识发展，及时调整教学内容、方法、设计和方式，同时将数学史料融入教学过程，可以有效地活跃课堂气氛，激发学生的好奇心和求知欲，调动学习的积极性及创造欲。

虽然在数学教育中融入数学史料内容能够有效地促进数学教育，但是《高等数学》作为高校对非数学专业学生开设的数学公共基础课程，在史料内容的选择上，应该遵循在保证其科学性的同时，更应注重其实用性、趣味性和广泛性<sup>[3]</sup>。即数学史料内容必须是正确的，对学生的学习及未来的工作是有直接帮助的，题材是引人入胜和不分年代、国家的。《高等数学》课程教学中融入的数学史料虽然可以是数学形成和发展的故事，数学对社会、经济等各领域发展的应用和影响，数学家的生平和贡献及轶闻趣事等，但重点应该是微积分的思想和方法。如数学思想、方法形成的过程与背景；数学家如何在实际需求的激发下，发现问题、创造思想、解决问题、构建理论和方法的过程；应用需求和数学思想是如何推动数学发展的等等内容。教师在史料处理的过程中也应该知道，故事和轶闻是外在的，关注的重点应该是内在的思想和方法。数学史料融入到《高等数学》这样的公共基础课程的核心价值应该是加强对教学内容中的概念、理论和方法本质的认识与理解；加强对数学的作用、地位的认识；培养学生驾驭教材的能力和学习的兴趣与积极性；发展数学思维，提高数学素质；强调发现、探索、解决实际问题过程，进而激发学生的创新思维和创造能力，真正使得学生在高等数学的学习过程中学有所得、学有所成、学有所用、学以致用、学用结合。

### 三、数学史料融入课程教学过程案例

数学史料融入到课程教学的方式可以是融入教材，课堂，讨论、练习与测试等各个环节。在各个环节中使用不同的史料可以起到不同的作用<sup>[6]</sup>。如讲述趣闻轶事以增加课堂情趣；介绍专题历史以勾画知识发展概要；描述创新细节以促进理解；展示思想发展脉络以提升知识的系统化；通过对数学悖论、思想争鸣、数学家的错误的了解培养敢于质疑的精神；重现应用背景，提高实践意识。下面是实施教学改革过程中的几个案例及其应用方式。

#### (一) 极限教学设计

极限思想贯穿于整个《高等数学》教学过程，绝大部分重要的概念、定理与方法都是以极限为基础的。如同埃尔波特说的<sup>[1]</sup>：“数学是一个有机体，它的生命力的一个必要条件是所有各部分的不可分离的结合。”而极限正是高等数学内容中微积分这个有机体结合的桥梁。因此，对极限思想的理解和掌握程度直接关系到学生对整个微积分学习内容的理解和应用。

在教学过程中，为更好地理解极限和掌握极限思想及其应用，我们采取的方式是：在教材<sup>[7]</sup>中，引入了古希腊哲学家芝诺提出的“阿基里斯和龟的问题”和中国古代刘徽的“割圆术”、祖冲之的“圆周率”等内容，从内容上激发学生的好奇心与求知欲；在课堂教学中，则对极限思想的产生和发展，从历史的角度分阶段进行了详细的介绍<sup>[8]</sup>。即从希腊学者德漠克利特的“原子论”，到欧道克斯的“穷竭法”，从《庄子天下篇》中的“一尺之捶”到刘徽的“割圆术”和祖冲之的“圆周率”时期对应的朴素的极限思想阶段；牛顿提出的极限直观性定义以及其他学者对极限概念完善的极限理论发展阶段；最后是柯西的量化定义和维尔斯特拉斯的符号表达的数学定义阶段。虽然，这些内容的融入会占用一定的教学时间，但是能够很好地让学生体会到数学产生的实际背景，由问题出发的理论与方法研究过程，研究者们敢于质疑，勇于挑战的勇气和孜孜以求的精神；同时，也对极限思想的本质有了更加深入的理解，对促进极限思想的应用有了更深的认识。

#### (二) 常数变易法教学设计

在进行《高等数学》课程教学时，应注意不仅传授知识，更应分析其产生的过程，尽可能地把教学过程当作学生能够参与的研究、探索过程；使学员不仅掌握前人的研究成果，而且了解结果产生的过程，从而掌握科学的方法论，进而研究出新的方法、开拓出新的应用，构建出新的理论。

在常微分方程内容教学中，一阶线性微分方程是其中重要的一类方程。对齐次一阶线性微分方程，容易利用分离变量法获得其通解。常数变易法的思想是：将通解中的常数 $C$ 用函数 $C(x)$ 代替，并设通解构建的函数为非齐次一阶线性微分方程的解，代入非齐次方程求得函数 $C(x)$ ，从而得到非齐次的通解。利用常数变易法求解非齐次一阶线性微分方程方法简单，过程优美，但是有很多同学也心存疑惑：是谁创造出这么美妙又实用的方法？这又是谁想到的呢？针对学生的疑问，我们进行了“穿越——如果你是拉格朗日”的课堂内容设计，带着学生一起穿越到18世纪的法国，共同回顾拉格朗日获得常数变易法的心路历程；并通过适当的引导，使得学生产生了对“常数变易法”有了不同的理解和新的认识<sup>[9]</sup>。在这样的过程中，学生不仅体验和学习了前辈们在创造数学理论时所遇到的困难、解决这些困难时的思维方法，而且有效地激发了学生学习数学的热情和探究未知的好奇感，培养了学生爱思考、勤思考的习惯。

#### (三) 泰勒多项式之中国古代数学中的内插法

在数学史料的选择过程中，很多教师过多地注重了西方近代数学的发展，对东方尤其是中国古代数学史关注不够。中国古代数学有着悠久的历史 and 深厚的积累，不少数学成就曾长期领先于世界。在非数学专业学生的《高等数学》教学中，一般没有开设数值分析，或计算方法之类的课程，而很多专业却在毕业设计以及以后的工作过程中需要用到一些数值计算方法，所以作为高等数学的扩展内容之一，我们对泰勒多项式部分内容进行了拓展，包括插值法在内的一些教学内容。

首先说明内插法的初步应用来源于我国古代数学著作

《九章算术》中的“盈不足术”，并对该方法以实例形式进行解释、说明。同时就该方法对欧洲数学发展的贡献和名称的变换，如阿拉伯数学著作中“契丹算法”，即中国算法、双设法及其地位的评价进行阐述。另外，介绍了插值方法在我国古代数学发展过程中的发展历程，从我国古代为编制历法发展的“招差法”到刘洪首次提出的一次内插公式，从刘焯在《皇极历》中使用的二次内插公式到僧一行在《大衍历》的不等距的差分公式，再到朱世杰在《四元玉鉴》中利用“三角垛”公式考虑的高阶差分问题<sup>[10]</sup>，强调实际上朱世杰已经得到了高阶差分插值公式的一般形式，已经具有了泰勒公式的基本形式。《四元玉鉴》的出现大概是1300左右，而类似的方法，在欧洲，直到牛顿时代（约1676年）才出现。这些重要的内插法不仅传到了印度和阿拉伯国家，而且传到了欧洲，直至整个十七世纪仍受到欧洲数学家的极大重视，并在这些方法基础上发展近似逼近解的思想，是产生微积分思想的重要途径之一。这些内容在《高等数学》课程中的融入与处理方式，对学生更好的理解微积分思想，培养学生的爱国主义情感和插值法的本质的理解与应用具有极大的促进作用。

#### （四）课后探索之从一个等式谈起

数学学习不仅仅需要有教师组织精彩的课堂教学活动，更需要有学生课后的广泛阅读、自主学习和深入探索。在教学实践中，由于课时的限制，重视课外的学习和探索是每一门数学课都不可或缺的环节。针对《高等数学》课程开设的目标对象，与理科专业不同的是，布置给学生或者由学生自己提出的课后独立，或团队协作进行探讨的探索性、实践性的问题，应该是相对简单的、趣味性和应用性较强的内容。

案例“从一个等式谈起”引导学生从一个优美的数学等式  $e^{i\pi} + 1 = 0$  出发，通过查找、整理文献，自主分析、小组研讨等方式，从历史的角度全面了解数  $1, 0, e, i, \pi$  的产生和发展过程，并分析它们的数学意义和对数学发展所起的作用<sup>[2]</sup>。等式中的这几个数都有着各自的曲折背景，联系着数学的发展历程，承载着数学的思想方法。从这个简单的等式能够让学生感受到数学内在的奇妙联系、引发无限想象。通过这样的过程，能够让学生充分了解和掌握其中所蕴含的数学思想和数学方法及数学发展的动因、数学理论与应用的关系，同时可以感受到数学抽象的简洁、和谐统一的美学特征。另外，对学生的自学能力、实践能力、团队协作与交流能力、文献查找与整理能力，阅读与写作能力等能力的提高都有积极的促进作用。

## 四、结束语

数学史，它不仅贯通了数学知识的前后联系，也再现了数学家的研究经历，揭示了数学思想方法的形成和发展过程。对于数学课程教学，尤其是像《高等数学》这样的公共基础课程，通过选择合适的、以数学思想与方法为主题的数学史料融入教学过程，对于增强数学活动的内涵，提升数学教学的效益，激发学生学数学、应用数学的意识具有重要意义，也很好适应了当前大众化高等教育阶段对高素质应用型、创新实践型人才培养的需求。

但是，要真正发挥数学史料在课程教学中的积极作用，关键在于内容的选择以及形式上适合于教学的处理，不能脱离教学实际，甚至喧宾夺主。而这要求数学教师必须非常熟悉数学史内容，并且根据课程实际和授课对象要善于加工史料，能够把数学的理论、方法、思想，甚至数学哲学、数学文化等内容恰如其分地，通过妙趣横生的课堂教学展现出来，同时又不脱离教学主题和偏离教学目标，只有这样，数学史料对数学教学的积极作用才能充分的发挥出来，并取得预期的效果。

#### [参考文献]

- [1] (美)克莱因. 古今数学思想[M]. 张理京, 张锦炎, 江泽涵译. 上海: 上海科学技术出版社, 2002.
- [2] 汪晓勤. HPM 视角下的高等数学教学[J]. 高等理科教育, 2003(5): 10-12.
- [3] 张楠, 罗增儒. 对数学史与数学教育的思考[J]. 数学教育学报, 2006, 15(3): 72-75.
- [4] 于书敏, 曲元海. 论数学史的教育价值[J]. 现代教育科学, 2006(1): 153-154.
- [5] 汪晓勤. 数学史与高等数学教学[J]. 高等理科教育, 2009(2): 20-24, 31.
- [6] 朱凤琴, 徐伯华. HPM 作为“教与数学对应”中介的理解和认识[J]. 数学教育学报, 2009, 18(3): 18-20.
- [7] 朱健民, 李建平. 高等数学(上册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [8] 李文婧, 张春明, 张海燕. 微积分学中的极限思想及其应用[J]. 陕西教育(高教版), 2011(10): 30-31.
- [9] 杜玲玲. 常数变易法的教学策略[J]. 教育与教学研究, 2010, 24(2): 101-103.
- [10] 李迪. 中国数学史简编[M]. 沈阳: 辽宁人民出版社, 1984.

(责任编辑: 陈 勇)