

问题式课堂教学设计案例分析

——以方向导数与梯度为例

刘雄伟, 朱健民, 李建平

(国防科学技术大学 理学院, 湖南长沙 410073)

[摘要] 问题式教学法是现在国际上比较流行的一种教学方法。问题式课堂教学的实施根据课程内容、学生特点会产生不同的教学效果。高等数学作为一门为大学新生开设的公共基础课程, 根据课程的特点, 很适合于问题式教学方式。方向导数与梯度作为应用性较强的教学内容, 采取问题式教学方法, 在课堂中以解决问题为任务, 取得了较好的教学效果。

[关键词] 问题式教学; 高等数学; 方向导数; 梯度; 教学设计

[中图分类号] G642.0 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1672-8874(2013)SO-0067-04

A Design Case of Problem - based Class Teaching: Directional Derivative and Gradient

LIU Xiong - wei, ZHU Jian - min, LI Jian - ping

(College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The problem - based teaching, which is a very popular teaching method in the world at present, can help improve teaching effects when we apply it in classroom in terms of the teaching content and the students' characteristics. Higher Mathematics, as a commonly - required course for freshmen, is very suitable for using the problem - based teaching according to its characteristics. By using problem - based teaching which takes solving problems as its main task, we have greatly improved the teaching quality and effect in directional derivatives and gradient with great application in Higher Mathematic.

Key words: problem - based teaching; Higher Mathematics; directional derivative; gradient; teaching design

一、引言

问题式教学法是指基于现实世界的, 以问题为导向、以学生为中心, 融自主、合作、探究为一体, 面向问题式学习提出的教学方法。问题式学习法(Problem - based learning: PBL)首先提出在20世纪50年代, 其发展则一般归功于20世纪70年代加拿大麦克马斯特大学的医学教育工作者。^[1]问题式学习, 从教师的角度来讲, 是一种教学方式, 而站在学生的角度看, 是一种学习方式。^[2]目前, 问题式教学法已从医学领域延伸到了各个学科, 已成为国际上较为流行的一种教学方法。

问题式的课堂教学方法与传统的教学法有很大不同^[3], 强调以学生的主动学习为主, 而不是传统教学中的以教师讲授为主; 强调将教学任务分布于问题

中; 在有意义的问题情景中, 在教师的引导下, 通过学生的自主思维探究、交互讨论合作, 在问题的解决过程中达到拓展学生知识, 形成解决问题的技能和培养会学习、会质疑、会探索的能力的教学目的。该教学法的精髓在于发挥问题对学习过程的指导作用, 调动学生的主动性和积极性, 使学生不但处于一个接受知识的过程, 更重要的是处于一个自主探究、合作互动的过程。

当然, 针对不同的课程, 实施问题式教学方法的实践过程、遇到的问题、采取的方式和可能获得的效果都不尽相同^[4], 只有充分结合分析课程和学生特点, 才能获得预期的效果。下面是我们在实施高等数学问题式课堂教学改革过程中为成功完成“方向导数与梯度”一部分教学内容的教学任务所实施的教学过程分析与具体的实施步骤。

[收稿日期] 2013-08-05

[作者简介] 刘雄伟(1974-), 男, 湖南安化人, 国防科学技术大学理学院讲师, 在读博士, 主要从事高等数学教学与快速算法研究。

二、教材分析

(一) 教材所处的地位和作用

《方向导数与梯度》是我们自编《高等数学》^[5]教材下册第10章第4节前半部分的内容。在实际教学过程中,不会完全遵照教材内容,而会根据实际教学进度与应用需求进行内容调整。在此之前,学生已学习了多元函数偏导数、微分的定义与计算,这为过渡到本节的学习起了铺垫作用。这部分内容是多元函数微分理论到最优化实际问题解决的过渡,可以说架起了多元微分学理论与实际应用的桥梁。

(二) 教学理念

根据学生与专业特点,认定的教学理念是:强化基础、淡化技巧,在教学中突出数学思想,适当拓展现代教学内容,运用现代化的教学手段,优化教学策略,加强数学实验与数学建模等应用能力的培养,充分体现数学素质在培养高素质人才中的作用。

(三) 教学重点与难点

本课中方向导数与梯度概念、方向导数的计算是重点,方向导数与偏导数的关系,方向导数、偏导数的存在性与可微性关系的讨论是难点。函数的偏导数的存在性、函数的可微性和沿着任一方向导数的存在性的判断一般借助于定义来实施,具有一定的抽象性与理论分析要求,在短时间学习的过程中学生掌握和理解还不够深入,相对来说比较难以理解它们之间的关系。因此有必要对它们的条件、结论与应用进行深入的分析与讨论。

三、教学目标

根据上述教材分析,考虑到学生已有的认知结构和心理特征,制定如下教学目标:

(一) 知识目标

掌握和理解方向导数和梯度的概念与计算方法;理解方向导数、偏导数与可微,方向导数与梯度的关系;会用方向导数与梯度理论与数学实验的方法解决相关的实际问题。

(二) 能力目标

通过教学培养学生综合运用所学知识发现问题、分析问题和解决问题的能力;培养学生会质疑、自我学习、自我发展和自我评价的能力;培养学生收集、分析、处理和利用信息的能力;培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、实验观察的能力与理论联系实际的能力。

(三) 情感目标

通过教学,引导学生从现实生活的经历、体验与观察到的现象出发,激发学生对学习数学的兴趣,使学生了解数学知识的功能与价值,形成主动学习的态

度,让学生初步认识到学习数学知识解决实际问题的意义,并感受到近似与精确的统一、运动与静止的统一、量变到质变的转化的辩证法的思想精髓,同时培养学生理性思考的思维品质和学会与他人合作的学习、工作方式。

四、教学策略

(一) 学情分析

在本次课之前,学生已经学习了偏导数与多元函数微分的概念与计算方法,对它们有了一定的认识和了解,知道函数的偏导数反映了函数沿着坐标轴正向的变化率,并且通过分析与讨论知道了多元函数的偏导数与微分的关系不同于一元函数导数与微分的关系。对多元函数的连续性、偏导数的存在性和多元函数的可微性之间的关系有了比较清楚的认识。在分析偏导数反映函数沿着坐标轴正方向的变化率时,就激发了很多同学关于函数沿着坐标轴负方向和其他任一方向函数变化率的关注。

在学习的过程中可能也存在一些困难,即函数沿着其他方向变化率到底如何定义,它与偏导数有什么关系,是不是对于任一函数都可以求它沿着任一方向的变化率等等。因此,根据学生的情况,应该充分抓住他们已有的兴趣,联系之前的知识,通过直观、简单、深入浅出的分析与讨论,轻松地实现他们对知识的渴求和解决问题的需要。

(二) 教学方法与手段

1. 问题式教学模式

通过实际问题的提出,激发学生学习的兴趣与学习的欲望。将问题的解决贯彻于整个教学过程,围绕问题的解决展开教学过程,实现学有所悟、学有所用、学以致用教学目标。通过问题式教学模式,有助于提升学生实践性的动手能力和应用能力,有助于拓宽学生的知识面和视野,有助于提高学生“用数学”的兴趣和能力,有助于培养学生研究的探索精神和创新意识。通过这样一步一步根据问题的需要引入概念和定义,提供方法与技巧,培养学生发现问题、分析问题和解决问题的能力。并通过前面内容的复习归纳,利用提问引导的方式,自然引导学生将之前的学习与本次课的内容联系上,使学生顺利进入本次课的情景,从而逐步实现本次课的目标。

2. 启发式教学方法

在教学过程中采用启发式、互动式教学方法。注意教学内容表述的启发式,给学生留出充分的想象空间,引导学生积极思考,使学生对教师提出的问题有响应,师生之间有对话、有交流。鼓励学生积极思维,调动学生求解、研究问题的欲望,并使学生感受到思考的乐趣,使学生真正成为教学的主体。而教师

成为学生学习的激发者、组织者和引导者。

3. 多媒体与实验化教学

借助于多媒体教学与数学实验手段, 加强教学内容的直观性, 使得教学的难点和重点容易突破, 努力减轻学生学习的负担, 消除学生的认知困难, 使得学生记忆的公式少了, 繁琐的计算没了。基本概念和理论通过多媒体的表现, 通过先直观、后抽象, 先观察、归纳、总结, 后演绎推理、分析证明, 更符合认知规律。结合数学实验与可视化技术及黑板板书的有效结合, 控制了教学节奏, 为启发式教学、问题驱动型教学方式的开展提供充分保障。同时对加强学生数学实验与数学建模能力和数学应用能力的培养具有积极的推进作用。

(三) 学法分析

根据认知规律, 鼓励学生观察日常生活中的现象与数学的联系, 鼓励学生利用数学的方法思考和解决问题, 从而产生对数学的兴趣和爱好。在兴趣与爱好的激励下结合适当的学习方法让学生享受“我参与、我成功、我快乐”的学习。

通过课堂教学让学生学会自主获取知识、掌握分析问题、探索问题和应用所学知识解决问题的方法。倡导学生采取目标明确的自主、合作、探究的学习方式, 发挥学生学习的积极性、主动性和创造性, 养成良好的学习习惯和培养协作精神与语言表达能力。

(四) 具体措施

根据以上分析和高等数学课程的特点, 本次课采用教师引导与学生自主探究相结合, 以实际问题的解决需求为主线, 将讨论与交流穿插到课堂的方式, 自然引入方向导数与梯度的概念与计算方法。在教学中以学生为主体, 在教师创建的和谐、活跃的教学情景中辅以适当引导, 利用多媒体的形象直观的演示和数学实验解决问题的方式, 注重数形结合, 完成教学目标。

五、教学过程

遵循“以实际应用需求为引导, 回顾旧知识, 引入新内容, 抽象新概念, 推理新方法, 满足应用需求, 总结归纳与拓广, 课后实践与练习”的原则实施教学过程。具体细节处理如下:

(一) 创设需求情景, 提出知识目标

通过分析天气预报中卫星云图变化原因, 归结为相邻区域气压高低分布不同。气压分布从数学角度考虑为二元函数 $z = f(x, y)$ 函数值变化规律的讨论。提出两个问题:

- (1) 如何刻画二元函数沿不同方向的变化;
- (2) 函数沿什么方向变化最快。

(二) 回顾旧知识, 引入新内容

回顾偏导数的定义及其反映二元函数沿着坐标轴正方向的变化率的意义。引出二元函数方向导数的定义为二元函数沿着给定方向平均变化率的极限:

$$D_{\vec{u}}f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \cos \beta) - f(x, y)}{\rho}$$

由此得出方向导数 $D_{\vec{u}}f(x, y)$ 反映的是函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处沿方向 \vec{u} 的变化率。并将定义在黑板上进行板书。

(三) 方向导数与偏导数的定义分析、对比与举例

通过方向导数与偏导数定义的分析与讨论, 例题的分析与求解, 得出: 任意方向的方向导数的存在性与偏导数的存在性之间没有必然联系的结论。其中例1偏导数的存在性与沿着任意方向方向导数的存在性的讨论, 首先通过直观图形方式给出直观印象, 得出相关结论, 然后通过定义方式进行验证, 并将验证过程进行黑板板书。以直观和精确表现形式充分加强学生印象。

例1: 讨论函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在原点处偏导数的存在性与沿任意方向 \vec{u} 的方向导数的存在性, 其中 $\vec{e}_i = (\cos \alpha, \cos \beta)$ 。

(四) 化繁为简, 给出新方法

通过例1的讨论与分析, 发现定义方式讨论方向导数的存在性与计算方向导数十分繁琐, 因此有寻找新方法的需求。根据需求给出函数沿着任意方向导数存在的充分条件和简单的计算公式, 即

定理1 如果函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 可微, 那么函数在该点沿任意方向的方向 \vec{u} 导数都存在, 且有

$$D_{\vec{u}}f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta$ 为向量 \vec{u} 的方向余弦。

通过例1过程的讨论与结论的分析, 引导学生得出函数可微与任意方向方向导数存在性的关系: 函数可微只是函数沿着任意方向的方向导数存在的充分条件。

通过定理条件的分析, 引导学生学会论证问题的思路与方法, 并在黑板上给出该定理的证明, 同时得出对应的计算式。

(五) 分析计算式, 引出新概念

通过对定理1方向导数计算式的变形分析, 引出梯度的概念, 并通过方向导数的计算式与梯度的定义, 写出方向导数的梯度描述形式:

$$D_{\vec{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{e}_i = |\nabla f| \cos(\nabla f, \vec{u})$$

由此引导学生得出函数增加、减少最快的方向与方向向量 \vec{u} 与 ∇f 的夹角与函数增减性之间关系的相关结

论。

(六) 归纳总结, 问题解决

回到最开始天气预报引出的问题: 第一个问题归结为方向导数内容的讨论, 第二个问题归结为梯度及梯度与方向导数关系的讨论。

(七) 内容拓展, 实验分析问题解决的可行性

针对学生提出的问题解决的可行性, 即二元函数的可知性, 通过数学实验, 采用样本点插值或拟合曲面(如气压分布函数构造、地势分布函数的构造等)的演示实验, 明确问题解决的可行性, 并拓展高等数学内容。

(八) 小结、展望与练习

对本堂课的内容进行简要小结, 引导学生给出本堂课应该掌握的内容与应该理清的关系。同时指出方向导数与梯度可以推广到三元、多元函数, 它们也是后面继续深入研究多元函数极值与最优化应用的基础。然后就它们在实际应用中的问题, 比如行军路线的选择、黄土高原沟壑现象的形成、地图上河流分布的特点进行分析和讨论。

最后给出使用本次课内容进行建模与实验的课后练习, 进一步加强学生对所学知识的理解和掌握, 并进一步提高数学知识应用能力与实验、探索水平。

练习1: 设有一表面光滑的橄榄球, 它的表面形状为由长半轴为6, 短半轴为3的椭圆绕其长轴旋转一周所得的旋转椭球面。在无风的细雨天, 将球放在室外的草坪上, 使长轴水平放置, 求雨水从椭球面流下的路线方程, 并用 Mathematica 软件模拟其流动过程。

练习2: 修建从山底到山顶道路时, 根据汽车的最大爬坡度选择最短路线。

六、小结与思考

本次课堂教学设计以问题牵引为主线, 在探索问题解决的理论与方法的过程中, 通过探讨给出新的概念与计算方法, 完成基于问题的教学任务的过程。在整个教学过程中学生以探索者的身份学习、讨论, 教师以引导者、学习的协作者和兴趣的激发者的身份参与教学。在问题的解决过程中, 共同经历了知识认识从模糊到清晰、从直观到精确把握的过程。

本节课设计的宗旨是: 贴近生活, 学有用的数

学; 贴近学生, 学有趣的数学; 贴近数学本质, 有效地学数学。通过师生互动交流, 及时了解学生的学习状况, 使学生在学会知识的同时更经历了探究的过程及成功的喜悦。同时在教学过程中实现了多媒体与黑板书写的无缝对接, 黑板书写的理论推导过程与有关的计算过程, 加强了学生的视觉记忆, 方便了后续讨论引用的需要, 而多媒体的直观表现与数学实验的开展对于激发学生兴趣, 活跃课堂气氛, 吸引学生注意力, 培养学生形象思维能力和探索精神, 提高教学效果具有积极的作用。

当然, 问题式教学方法要真正有效地实施, 需要有能够全身心投入教学的教师^[6], 也需要有愿意主动配合的学生。只有在教师充分的前期准备和学生的积极交流、讨论, 问题式教学方法才能够取得预期的教学效果, 实现预期的教学目标。但是, 由于我国的学生一直长期接受着“填鸭式”的教育, 各方面原因导致以追求好“分数”为目标, 由此导致的学习能力不强, 合作能力欠缺, 信息获取方式单调, 缺少自主探究与质疑的兴趣与欲望等因素, 使得问题式教学方法的改革任重而道远。

[参考文献]

- [1] Hung, W., Jonassen, D. H., & Liu, R. Problem-based learning. In M. Spector, D. Merrill, J. van Merriënboer, & M. Driscoll (Eds.), *Handbook of research on educational communications and technology* (3rd ed) [M]. New York: Erlbaum. 2008:485 - 506.
- [2] 陈爱萍, 黄甫全. 问题式学习的内涵、特征与策略[J]. 教育科学研究, 2008(1): 38 - 42.
- [3] Seon Young Hwang, Mi Ja Kim. A comparison of problem-based learning and lecture-based learning in an adult health nursing course [J]. *Nurse Education Today*, 2006(26): 315 - 321.
- [4] 姜晓昱, PBL应用于高等院校本科教学实践的三种变型[J]. *江苏高教*, 2007(3): 75 - 77.
- [5] 朱健民, 李建平. 高等数学(下)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007:144 - 151.
- [6] Abdus Salam, Nabishah Mohamad, etc. Challenges of Problem Based Learning [J]. *South East Asian Journal of Medical Education*. 2009, 3 (2): 54 - 60.

(责任编辑: 卢绍华)