“线性代数”课程内容优化研究及其在 MOOC 教学中的实践

文　军，屈龙江，刘春林，海　昕，钱　旭
（国防科技大学　文理学院，湖南　长沙　410073）

摘　要：分析了对“线性代数”课程内容进行优化的必要性，总结了国内外高校相关研究的现状。以 MOOC 课程建设为契机，以课程内容的知识体系、知识点、计算方法、案例等为重点，开展了系统的优化研究与实践。

关键词：线性代数；MOOC 课程；优化；研究；实践
中图分类号：G642　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1672－8874（2021）02－0066－06

Content Optimizing of Linear Algebra Based on Practice in MOOC Curriculum

WEN Jun，QU Long-jiang，LIU Chun-lin，HAI Xin，QIAN Xu
（*College of Liberal Arts and Sciences*，*National University of Defense Technology*，*Changsha* 410073，*China*）

Abstract：The paper analyzes the necessity of optimizing the course content of Linear Algebra，and summarizes the status quo of relevant research at home and abroad. Based on the construction of MOOC，the systematic optimization research and practice are carried out with the focus on the knowledge system，knowledge points，calculating methods and cases of this course.

Key words：linear algebra；MOOC courses；optimization；research；practice

一、引言

2017 年 2 月，教育部发布了《教育部高等教育司关于开展“新工科”研究与实践的通知》，其中一个重要问题就是推动应用理科向工科延伸。在这一背景下，数学公共课程除了强调学生对经典知识的掌握、训练数学素养之外，更需要密切联系应用需求进行优化，培养学生对数学原理和方法的应用能力。

“线性代数”是普通高等院校普遍开设的一门本科必修数学公共基础课，当前课程教学内容的特点主要体现为概念多、符号多、定理和公式多，知识相互渗透，教学内容在组织上往往强调数学知识体系的严谨性，在应用和能力上强调提高学生的抽象思维和逻辑推理能力。

近 20 年，信息技术飞速进步，数字化社会以数据为要素深度改变着各个领域。以离散数据处理作为背景，“线性代数”知识应用几乎涵盖所有的工程技术领域以及部分社会科学领域。

然而，国内“线性代数”课程近 30 年来教学内容偏重数学理论推导，在现实意义和实践应用方面体现不够，课程内容与实际需求之间的差距日益扩大，在教学中出现了抽象、难懂、不实用的尴尬局面。同时，“线性代数”课程都在本科学习的前两年开设，本科新生并未完全具备严谨的抽象思维和推理技能。当课程内容高度抽象时，就会使学生对线性代数课程的认识形成学不懂、

收稿日期：2020－06－10
基金项目：湖南省普通高等学校教学改革研究项目（2019JGYB002）；湖南省普通高等学校教学改革研究项目（2018JGYB003）；国防科技大学本科教育教学课题（U201805）
作者简介：文　军（1976－），男，湖南邵阳人。国防科技大学文理学院副教授，博士，主要从事多媒体技术研究。

不会用、不知学为何用的印象，感觉"线性代数"课程几乎只是一门"考研数学课"。

1990 年，美国国家科学基金会资助成立的"线性代数"课程研究组（Linear Algebra Curriculum Study Group，简称 LACSG）建议减少"线性代数"课程的抽象性，强调课程应当为科学界和工业界提供数学工具。随后，进行教师培训和改革教学内容，相关教材经过二十多年的不断再版，包含了一定的数值线性代数知识和应用实践方面的内容。Lay 编写的《线性代数及其应用》教学内容既以线性变换为主线，又以变换来联系现代数学思想，引入数值计算内容，突出计算机线性代数发展和实践的影响，在概念引入时非常重视几何直观或应用背景，做到了数学理论与现代科技的结合[1]。Gilbert 在《Introduction to Linear Algebra》中以线性方程组为主线，以向量作为全部内容的引入，除经典内容外还涉及了现代的矩阵分解、数值线性代数等教学内容，并在教学内容中利用科学计算软件来解决线性代数问题，在微观上同样以二、三维空间的几何直观来引入知识点并推广至有限维空间[2]。Steven 在《线性代数》中同样引入了奇异值分解等服务实际应用的内容，并结合应用实例引入线性代数的基本概念和知识[3]。

近十年来，国内越来越多的高校教师也意识到"线性代数"课程内容与实际需求的强烈反差，自下而上地对课程内容开展了改革，在优化教学知识体系、完善教学内容等方面的探索中形成了百家争鸣、百花齐放的局面[4-10]。各方面探索的一项重点研究是从课程经典内容出发，进行不同的组合与优化，对传统内容体系进行调整和丰富，同时加强知识的应用环节，主要体现在：以经典内容为基础，以矩阵或者线性方程组为主线，对现有内容进行重新编排，并在此基础上结合不同专业的需求适当引入教学案例，体现建模思想或科学计算应用[11-14]。

二、我校"线性代数"课程现状及 MOOC 课程的需求分析

我校当前"线性代数"的课程内容以"行列式－矩阵－向量空间－相似矩阵－二次型"的逻辑结构进行组织，主要考虑数学知识体系的严谨性，强调抽象理论的数学陈述。一方面，导致了课程主线不够突出且未能充分凸显抽象概念的具体内涵；另一方面，导致了对课程经典理论的应用需求等背景体现不够，未能充分体现数学工具在科学研究和工程技术中的基础性作用。例如，作为信息载体的矩阵和向量，课程内容局限于单一的数学概念和理论，其中对于矩阵的内容，强调对概念的理解和基本计算技能的掌握，对于矩阵的客观背景、矩阵运算、逆矩阵等实际含义及应用背景缺乏介绍，更未涉及变换、分解等联系当前应用需求的知识；而对于向量的内容，单纯强调 n 维向量组和向量空间的数学理论，未能突出高维数据、高维空间、坐标变换等知识在科学技术特别是新兴智能科学技术中的直观应用背景。当前课程内容可以训练抽象思维能力，在一定程度上训练计算能力，但是对于非数学专业的学生而言，增加了学习和理解的难度，且不能满足学员专业需求和长远发展的知识应用和能力需求，不能满足"新工科"建设的需求。

近年来，国内外分别探索以线性方程组、矩阵或线性变换作为主线的内容体系，同时针对知识点优化的显著趋势，结合应用需求强化矩阵弱化行列式，探索数值线性代数内容的引入。我们紧密联系这一课程内容改革的趋势，结合我校新工科建设过程中各学科专业对数学基础知识的需求和学生能力培养的变化，以 MOOC 课程建设为契机，以"降低入门门槛，立足经典内容，紧贴时代需求，启发主动思考，提高应用能力"为总体目标，以课程内容的知识体系、知识点、计算方法、案例等为重点，开展了系统的深入研究与实践。

当前，我校"线性代数"课程内容包括行列式、矩阵、向量空间、相似矩阵和二次型，如图 1 所示。教材内容上存在主线不突出问题，既能以线性方程组也能以矩阵作为主体来展开教学。但是从知识点的起源、发展和课程内容的体系来分析可发现，这些内容都是围绕线性方程组求解这一中心问题展开的。行列式与矩阵主要解决解的存在性及求解方法的问题，向量空间主要是解决线性方程组解的结构问题，而相似矩阵和二次型则是应用线性方程组求解方法及相关的工具来解决简单的数学问题。因此，在 MOOC 课程建设中，在知识体系上必须突出线性方程组的课程主线。

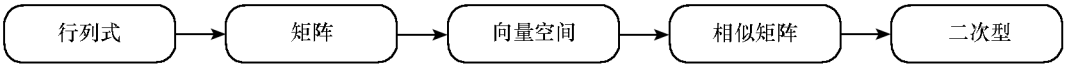

图 1　当前的课程体系

从图 1 可以看出，当前课程内容的标题性知识点包括了五个不同的章节，其中“矩阵”只是课程中与“行列式”并列作为线性方程组求解工具的一个知识点。但是通过分析可以发现，“矩阵”是课程内容计算和分析的一个主要工具，这也是当前课程能够以矩阵作为主线的一个重要根据。从图 2 可以看出，行列式可以看作是方阵的一种运算，被广泛应用于秩、可逆性等内容；矩阵所对应的列向量组（行向量组）的系列知识是向量空间理论的基础和计算工具；相似矩阵是联系矩阵理论和实际应用的桥梁之一，本质是利用特征值和特征向量对方阵进行相似化简；二次型的学习主要以实对称矩阵为背景展开。因此，在 MOOC 课程建设过程中，在将线性方程组作为课程主线后，针对课程内容进行优化时将矩阵作为主要工具来强化，凸显其作为数学工具在理论和科学技术中的应用。

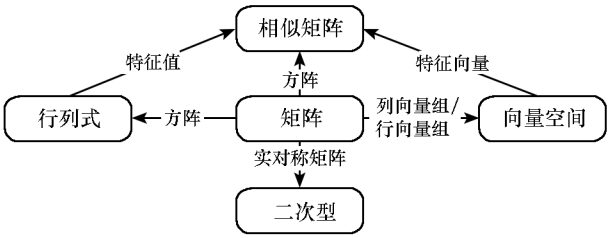

图 2　矩阵是课程内容的主要工具

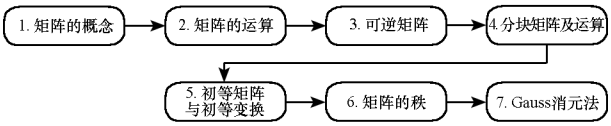

图 3　当前课程内容“初等变换”概念出现较晚

当前课程“矩阵”一章中包括了不少计算和分析的方法，其中“初等变换”的概念出现较晚，如图 3 所示。然而“初等变换”在课程内容各个章节都是计算和分析的一个主要方法，如图 4 所示。通过初等变换可以将行列式三角化、求矩阵的秩和向量组的秩；通过初等变换求最简行阶梯形则被广泛应用于求逆矩阵、求解线性方程组、向量组的线性表示、求极大线性无关组；通过合同变换可以求二次型的标准形等。因此，在 MOOC 课程建设过程中，结合课程的主线和主要工具，将初等变换作为主要方法来凸显。

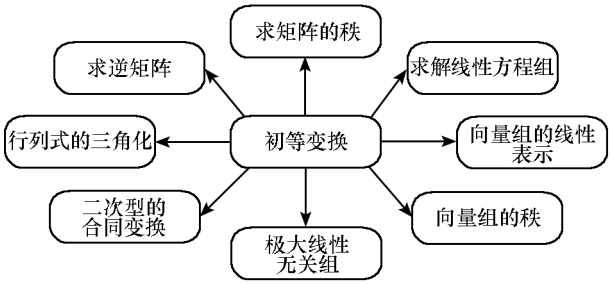

图 4　初等变换是课程内容的一个主要方法

当前课程内容通常以单一的“定义 - 定理 - 性质 - 例题 - 习题”模式进行组织，单纯的理论叙述重复着从数学到数学的模式，一味强调训练抽象推理和思维，无形中增加了学习难度，不利于知识的理解和应用。为改善这一现象，在 MOOC 课程建设过程中，针对课程内容进行优化时，一方面，对于抽象概念充分联系背景出处，由具体到抽象、由低维到高维分析各种性质，强化对抽象理论的理解；另一方面，就是结合我校信息学科的需求，以案例例题化为重要手段，将应用案例有机融入课程内容。

三、在 MOOC 课程中的实践

上述研究表明，在开展课程内容优化时，一方面，必须将课程经典内容融合为主线明确、重点突出的整体作为根本；另一方面，必须将经典内容与实际需求有效联系，弥补理论与应用之间的鸿沟。我们以此为基础，在 MOOC 课程建设中，针对每个重点方面开展了广泛的教学实践。

（一）优化课程经典内容

MOOC 课程建设的基础和核心是课程的经典内容。在实践中，我们“以线性方程组为主线，以矩阵为主要工具，以初等变换为主要方法”来实现“降低入门门槛，立足经典内容”，从而将课程的数学理论以重点知识为总纲进行紧密融合。

1. 突出课程的主线

为突出线性方程组在课程内容知识体系上的

主线地位，并降低入门门槛，MOOC 课程首先增加作为预备知识的章节“几何空间与线性方程组”来构建课程的第一章，如图 5 所示。章节充分联系中学数学内容和现实意义，将二三维几何空间和线性建模作为课程入门内容，以学生所熟悉的直角坐标系、向量理论、形象的空间关系，利用线性方程组开展实际应用建模来凸显数形结合以及课程知识的应用性，并自然提出课程的主线。同时，为进一步凸显课程主线，对本部分几何知识的内容采取了“用而不究”的处理方式，即只是充分利用已有的几何基础知识作为线性方程组的引子，而不对解析几何内容进行广泛的深入研究。然后合并矩阵与行列式，统一成为线性方程组求解方法的知识模块。将相似矩阵知识点的标题更改为方阵的相似化简，可以更好地作为应用模块来联系课程主线。

2. 突出课程的主要工具

矩阵无论是在线性方程组求解中还是在实际应用中都是非常重要的数学工具。在实际应用中，矩阵的工具属性主要是通过矩阵运算特别是矩阵乘法运算所表示的变换来体现的，同时矩阵分解也是现代科技中矩阵工具属性体现的一个重要方面。因此，MOOC 课程除将矩阵作为线性方程组求解工具之外，还从两个不同方面来突出矩阵作为课程主要工具的地位。首先，通过对矩阵乘法运算理论及应用的强化来进一步凸显其数学工具的属性，并为联系应用埋下伏笔。例如，在矩阵乘法概念的内容中，除数学定义及性质之外，通过数学中换元法的案例联系几何空间中向量的变换，明确了矩阵乘法是变换复合的本质地位，同时通过数字图像中的动画、信息加密等案例来形象体现；在后续逆矩阵、初等变换、几何变换、线性方程组的迭代求解法、向量组的线性表示、向量空间的基变换与坐标变换等内容中，通过理论分析和应用案例，反复凸显矩阵乘法的本质与应用；结合基础理论引入矩阵分解等联系应用的新内容，从不同视角凸显矩阵作为主要工具的重要地位，如图 6 所示。

3. 突出课程的主要方法

通过优化内容编排，MOOC 课程适时引入“初等变换”的概念来体现初等变换作为课程内容主要方法的地位。从图 7 可以看出，首先，将知识点内容由“初等矩阵与初等变换”修改为“初等变换与初等矩阵”来凸显“初等变换”这一概念。然后，将知识点提前到“矩阵的概念”和“矩阵的运算”之后，从而将“初等变换”提高成与“矩阵的运算”这一主要工具并列的主要方法，并在之后的每一个知识点中得到体现。例如，在行列式的内容中，可以利用初等变换很自然地引入行列式的有关性质以及三角化方法；可以将分块矩阵的运算和分块初等变换作为并列的知识点；在逆矩阵一节中，可以系统地介绍各类求逆矩阵的方法。

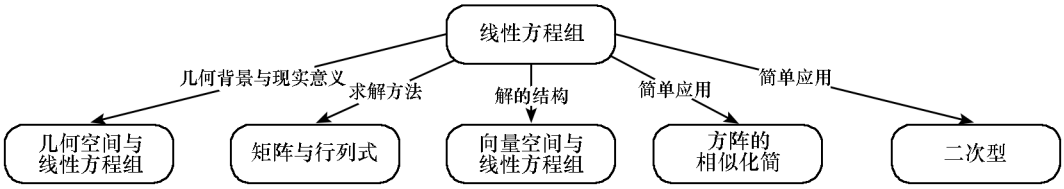

图 5　凸显线性方程组是课程的主线

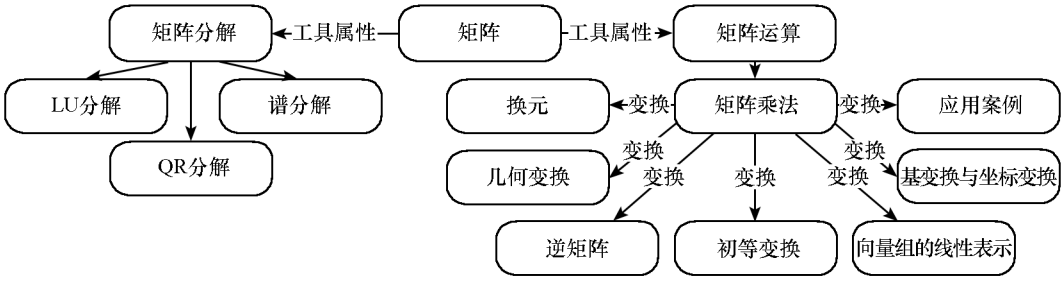

图 6　以矩阵乘法与矩阵分解来体现矩阵是课程的主要工具

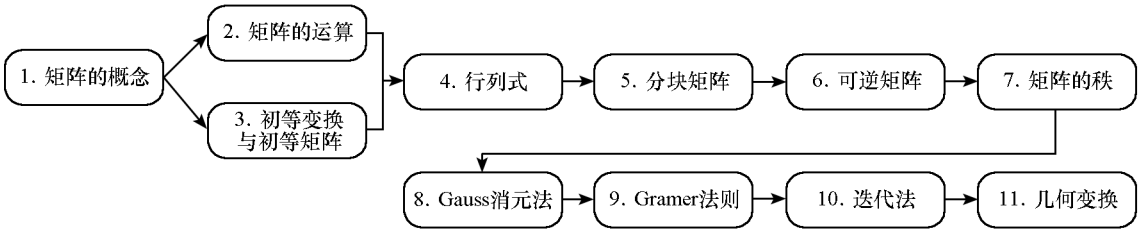

图 7　用优化编排来体现初等变换是课程的主要方法

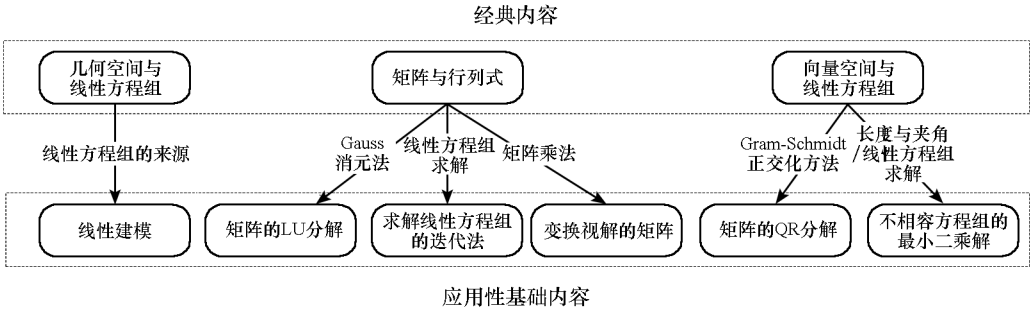

图 8　基于经典内容优化引入的部分应用性内容

（二）优化课程内容与应用的联系

MOOC 课程建设的特色是突出与应用的联系。在实践中，借助几何直观与物理模型，“以强化矩阵与向量作为重点，以适度引入数值线性代数内容为探索，以案例例题化为手段”，科学引入新内容来实现“紧贴时代需求，启发主动思考，提高应用能力”，使课程内容感性认知和抽象思维并重，缩小与实际需求的反差。具体而言，就是在保障课程经典内容的基础上，结合我校各学科专业学习与研究的实际需求，以矩阵和向量有关知识为重点，进一步强化与应用需求之间的联系。

1. 科学引入应用性基础内容

线性代数课程的经典内容只是考虑了数学理论的严谨性。针对这一不足，在 MOOC 课程建设中，通过系统梳理和选择，借助几何直观和物理模型，以经典内容为引导，引入了矩阵分解、线性方程组的数值求解方法等应用性基础内容，作为联系应用的承上启下性环节。图 8 给出了围绕课程主线和重点知识引入的部分应用性基础内容的情况。首先，针对线性方程组这一课程主线，在概念提出阶段，结合问题的来源引入基于几何空间及实际应用背景的线性建模内容，在线性方程组求解方法中结合实际应用的效率问题引入求解线性方程组的迭代法，结合实际应用中大量存在的不相容线性方程组引入最小二乘解的内容；然后，针对矩阵这一主要工具，引入形象的几何变换，从动态的变换视角解读矩阵和矩阵运算，在 Gauss 消元法之后，结合方法的矩阵运算解读引入矩阵 LU 分解的基础知识，在 Gram-Schmidt 正交化方法后进行反向推理结合矩阵运算解读引入矩阵 QR 分解的基础知识等。

2. 探索建设跨学科的例题化案例

当前大部分线性代数课程案例在建设时往往基于个别理论单独组织，与课程内容联系上存在不足。MOOC 课程建设中以案例例题化为主要手段，围绕课程知识，选择专业背景简单、数学原理直接、实施方案简洁、具有启发性、易于拓展研讨的应用案例进行简化、分解，将案例构建为例题、引例，有机融入课程内容，做到重点内容引入有背景、延拓有案例。例如，在线性方程组内容中，融合交通模型、营养医学模型等线性建模的案例，应用的课程知识点贯穿了线性方程组的引入、线性方程组的求解方法和线性方程组解的结构；在矩阵内容中，融合数字图像处理的对象探测、信息隐藏、信息伪装和数字动画构建系列案例，应用的课程知识点包括矩阵运算、逆矩阵和变换视角的矩阵；在向量空间教学中，融合信息检索和智能驾驶等应用构建系列案例，应用的课程知识点贯穿了向量的引入、向量空间、欧氏空间；在方阵相似化简内容中，融合了 Pagerank 算法、生态模型的案例，应用的知识点包括特征值与特征向量、相似对角化等；在二次型内容中，

融合了多元函数极值的案例，应用的课程知识点包括对称矩阵和二次型的分类。通过对引例的感性分析和抽象来引入数学原理，并通过应用性的例题化案例对数学原理进行延拓，不断"反刍"强化教学内容，在保障逻辑思维能力和手算能力培养的同时，增强学生对基本知识和基本思想方法的理解与应用，并在应用中进一步强化逻辑思维能力和科学计算能力的训练。

四、MOOC 课程教学中的反馈及分析

我校的"线性代数" MOOC 课程建设于 2018 年启动，通过对课程内容的优化研究，于 2019 年完成录制并在中国大学 MOOC 平台正式上线，已经完成两轮教学任务。MOOC 课程将教学内容分解为 40 讲，归纳为"几何空间与线性方程组"（3 讲）、"矩阵与行列式"（17 讲）、"向量空间与线性方程组"（13 讲）、"方阵的相似化简"（4 讲）、"二次型"（3 讲）共五个章节。在已经完成的两轮教学任务中，除本校学生外，还有 3 万余人选课学习，只有个别同学反馈中对课程体系相对于传统体系的变化表现出一定的不适应，绝大部分同学对课程内容的优化给出了非常积极的正面评价，认为课程"有思想，不抽象"。主要反馈集中在以下三个方面：（1）经过优化后的课程内容循序渐进，主线突出，体系合理，条理清楚，不是单纯的定义和定理的堆砌，降低了入门难度，提高了对内容的理解和掌握；（2）经过优化后，抽象的数学理论联系具体的现实背景，变得形象生动，深入浅出，原理透彻，能够有效激发学习兴趣，可以更好地理解之前还存在困惑的课程难点；（3）经过优化后，在体现课程内容本质性数学思想的同时也能够体现应用价值，在学习中感受到了数学的魅力。

从 MOOC 课程教学实践的反馈分析可以发现，优化后的课程内容有效实现了"降低入门门槛，立足经典内容，紧贴时代需求，启发主动思考，提高应用能力"的总体目标。当然，也发现了一些问题，主要有：（1）如何进一步通过内容优化来增强数学思维，强化数学思想，体现分类、变换等各种思想，突出课程中的各种典型关系；（2）除例题化的教学案例之外，可以探索建设研讨与实验案例，这类案例以数学建模和科学计算软件为手段，结合一定的专业背景，灵活应用课程知识来解决一定的应用性问题。通过研讨与实验案例，引导学有余力的学生自由探索，进一步培养学生的自主学习能力、数学建模能力、分析和求解问题能力；（3）总结研究和实践的经验，以 MOOC 课程为依托，完善教材建设和线下课程建设，从课前自主学习、课堂教学互动、课后巩固提高等不同环节，研究线上线下混合式教学，进一步融合线上教学丰富的信息手段、教学素材、表现形式和线下教学亲近度高、互动性好等优势和特点，做到教学研究、教材建设、线下教学和线上教学的互相促进，更好地满足教学要求。

参考文献：

[1] LAY D C. 线性代数及其应用[M]. 5 版. 刘深泉，张万芹，陈玉珍，等，译. 北京：机械工业出版社，2018.

[2] STRANG G. Introduction to Linear Algebra[M]. 4 th ed. Wellesley MA：Wellesley Cambridge Press，2009：V－VIII.

[3] LEON S J. 线性代数[M]. 9 版. 张文博，张丽静，译. 北京：机械工业出版社，2018：IV－VII.

[4] 申国伦，薛有才. 中美一些《线性代数》教材分析与思考[J]. 大学数学，2009(5)：202－206.

[5] 王正盛. 中外线性代数教材的比较与探讨[J]. 大学数学，2009(1)：200－203.

[6] 张鹏鸽，高淑萍，马建荣. 对比国外优秀教材探索我国线性代数课程改革的新思路[J]. 大学数学，2010(S1)：132－135.

[7] 杨文霞，韩华，彭斯俊. 信息大类专业《线性代数》课程教学改革的研究与实践[J]. 大学数学，2016(3)：65－70.

[8] 李继成. 线性代数与空间解析几何课程全面改革的思考[J]. 大学数学，2010(2)：7－10.

[9] 陈怀琛，高淑萍. 论非数学专业线性代数的内容改革[J]. 高等数学研究，2015(2)：8－11.

[10] 杨文霞，何朗，彭斯俊. 基于 SPOC 和翻转课堂的线性代数混合式教学改革与实践[J]. 大学数学，2017(4)：44－50.

[11] 黄廷祝，成孝予. 线性代数与空间解析几何[M]. 5 版. 北京：高等教育出版社，2018：I－II.

[12] 谢政. 线性代数[M]. 北京：高等教育出版社，2012：I－IV.

[13] 孙良，闫桂峰. 线性代数[M]. 北京：高等教育出版社，2016：i－ii.

[14] 刘建亚，吴臻，秦静，等. 线性代数[M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2018.

（责任编辑：邢云燕）